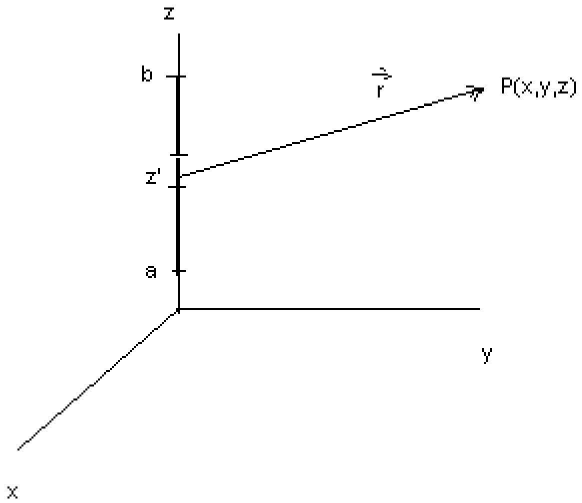

Şekilde z=a ve z=b noktaları arasına yerleştirlmiş $\lambda[C/m]$ sabit yük yoğunluğu taşıyan telin uzaydaki bir P(x,y,z) noktasında oluşturduğu elektrik alanın ifadesini elde ediniz

ÇÖZÜM:

Öncelikle tel üzerindeki bir z’ noktasından P noktasına, yani kaynak noktasından gözlem noktasına uzanan $\vec{r}$ vektörünün bileşenlerinin yazılması gerekir. Verilen problemin yapısı gereği en uygun ifade silindirik koordinatlarda (ρ,ϕ,z) yazılabilir. ρ burada yarıçap bileşenini göstermektedir:

$$\vec{r} = (z-z')\vec{e}_z + (\rho-\rho')\vec{e}_\rho = (z-z')\vec{e}_z + \rho\vec{e}_\rho$$

$\vec{e}_z$ ve $\vec{e}_\rho$ sırasıyla z ve ρ doğrultularındaki birim vektörlerdir. Kaynak bölgesi z ekseni üzerinde olduğundan $\rho'=0$ olur. z’ noktası etrafındaki sonsuz küçük tel parçasının uzunluğuna dz’ dersek, bu parça üzerindeki toplam yük $\lambda dz'$ değerini alır. Yani bu sonsuz küçük parçanın P noktasında oluşturduğu alan

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz'}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

Bu ifade tüm tel üzerinde integre edilirse telin oluşturduğu toplam alan elde edilmiş olur:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{[(z-z')\vec{e}_z + \rho\vec{e}_\rho]}{[(z-z')^2+\rho^2]^{3/2}}dz'$$

Bu integralin $\vec{e}_z$ ve $\vec{e}_\rho$ doğrultuları için iki farklı bileşeni mevcuttur ve bunların ayrı ayrı hesaplanması gerekir. $\vec{e}_\rho$ yönünde, integral z’ üzerinde tanımlandığından ρ dışarı çıkarılabilir. Buna gore integral $t=(z-z')$ ve $c=\rho$ için ($dt=-dz'$)

$$-c\int \frac{dt}{[t^2+c^2]^{3/2}}$$

formundadır. Bu integral alan teorisi problemlerinde en sık karşılaşılaşılan integrallerden birisidir ve $t = c \cdot \tan(u)$ dönüşümü yardımıyla hesaplanabilir.

Bu durumda $dt = c \cdot \sec^2(u)\,\mathrm{d}u$ olur ve integral

$$-c\int \frac{c\cdot\sec^2(u)\,\mathrm{du}}{[c^2\left(\tan^2 u+1\right)]^{3/2}} = -c\int \frac{c\cdot\sec^2(u)\,\mathrm{du}}{[c^2\sec^2 u]^{3/2}} = -c\frac{1}{c^2}\int \cos u\, du = -\frac{1}{c}\sin u$$

$$= -\frac{1}{c}\sqrt{1-\cos^2 u} = -\frac{1}{c}\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2(u)}} = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\sec^2(u)-1}{\sec^2(u)}} = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\tan^2(u)}{\tan^2(u)-1}}$$

$\tan(u) = \dfrac{t}{c}$ olduğundan integralin sonucu

$$-c\int \frac{dt}{[t^2+c^2]^{3/2}} = -\frac{1}{c}\frac{t}{\sqrt{t^2+c^2}}$$

olarak bulunur. Buna göre elektrik alanın $\vec{e}_\rho$ bileşeni şu şekilde belirlenir:

$$E_\rho = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\frac{(z'-z)}{\sqrt{(z-z')^2+\rho^2}}\Bigg|_{z'=a}^{z'=b}$$

$\vec{e}_z$ yönü için de aynı $t = (z-z')$ ve $c = \rho$ eşitlikleri için ($dt = -dz'$)

$$-\int \frac{tdt}{[t^2+c^2]^{3/2}}$$

Integrali ortaya çıkar. Bu integral ise $u = t^2 + c^2$, $du = 2tdt$ dönüşümüyle hesaplanır:

$$-\int \frac{tdt}{[t^2+c^2]^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = u^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{t^2+c^2}}$$

Buna göre elektrik alanın $\vec{e}_z$ bileşeni şu şekilde belirlenir:

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+\rho^2}}\Bigg|_{z'=a}^{z'=b}$$

Böylece toplam elektrik alan:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\frac{(z'-z)}{\sqrt{(z-z')^2+\rho^2}}\Bigg|_{z'=a}^{z'=b}\vec{e}_\rho + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(z-z')^2+\rho^2}}\Bigg|_{z'=a}^{z'=b}\vec{e}_z$$

Telin sonsuz uzun olduğu durumda yani $a \to -\infty$ ve $b \to \infty$ için $\vec{e}_z$ yönündeki integral sıfır değerini alır, $\vec{e}_\rho$ için de ifade basitleşir:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\vec{e}_\rho$$